問題 1

(1) $f(x) = x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1})$ $(x > 1)$ の導関数を求めよ．ただし log は自然対数を表す。

(2) 正の実数 a に対して，2 つの曲線

$$H\colon x^2 - y^2 = \frac{1}{2}, \quad x > 0\ ; \qquad\qquad E_a\colon \frac{x^2}{1+a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

に囲まれた xy 平面上の図形の面積を $g(a)$ とおく。このとき，次を求めよ。

(a) $g\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

(b) $\displaystyle\lim_{a \to +0} g'(a)$.

問題 2

次の極限値が存在するような正の整数 m をすべて求め，そのときの極限値を答えよ。

$$\lim_{x \to +0} \frac{10^x - e^x}{x^m}$$

解答 1

(1)

$$f'(x)=\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\underline{2\sqrt{x^2-1}}.$$

(2) H と E_a の交点のうち第一象限にあるものを $\mathrm{P}(p^2,q^2)$ $(p,q>0)$ とおくと，

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ \frac{1}{1+a^2} & \frac{1}{a^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\qquad\text{なので}\qquad\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\frac{a^2(1+a^2)}{2a^2+1}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 1\\ \frac{-1}{1+a^2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

したがって

$$p^2=\frac{a^2(1+a^2)}{2a^2+1}\left(\frac{1}{2a^2}+1\right)=\frac{1+a^2}{2},\qquad\text{すなわち}\qquad p=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2}}.$$

求める面積は

$$\begin{aligned}g(a)&=2\left(\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}/\sqrt{2}}\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}\,dx+\int_{\sqrt{1+a^2}/\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}}a\sqrt{1-\frac{x^2}{1+a^2}}\,dx\right)\\&=2\left(\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{s^2-1}\,ds+a\sqrt{1+a^2}\int_{1/\sqrt{2}}^1\sqrt{1-u^2}\,du\right)\qquad\left(\begin{array}{l}s=\sqrt{2}x\\ u=x/\sqrt{1+a^2}\end{array}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[s\sqrt{s^2-1}-\log(s+\sqrt{s^2-1})\right]_1^{\sqrt{1+a^2}}+2a\sqrt{1+a^2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+a^2}-\log(a+\sqrt{1+a^2})\right)+2a\sqrt{1+a^2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{\pi}{4}a\sqrt{1+a^2}-\frac{1}{2}\log(a+\sqrt{1+a^2}).\end{aligned}$$

とくに

$$g\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\frac{3}{4}\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)=\underline{\frac{15\pi}{64}-\frac{1}{2}\log 2}.$$

さらに，

$$g'(a)=\frac{\pi}{4}\sqrt{1+a^2}+a(\dots)-\frac{1}{2\sqrt{1+a^2}}\qquad\text{なので}\qquad\lim_{a\to+0}g'(a)=\underline{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}.$$

解答 2

まず $m=1$ のとき $\dfrac{10^x-e^x}{x}=e^x\dfrac{\left(\frac{10}{e}\right)^x-1}{x}=e^x\dfrac{\left(\frac{10}{e}\right)^x-\left(\frac{10}{e}\right)^0}{x}$.

ここで $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{10}{e}\right)^x-\left(\frac{10}{e}\right)^0}{x}=\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=0}\left(\frac{10}{e}\right)^x=\log\frac{10}{e}=\log 10-1.$

したがって，

$$\lim_{x\to0}\frac{10^x-e^x}{x}=e^0(\log 10-1)=\log 10-1.$$

次に $m\geq 2$ のとき，

$$\frac{10^x-e^x}{x^m}=\frac{1}{x^{m-1}}\frac{10^x-e^x}{x}$$

の右辺の 2 番めの因子は $x\to+0$ のときに $\log 10-1\neq 0$ に収束するが，$1/x^{m-1}$ は正の無限大に発散する．したがって $m\geq 2$ のとき極限値は存在しない．

<u>$m=1$，極限値は $\log 10-1$</u>