（令和６年度前期日程）

数　　　学

180　分

注　意　事　項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 問題冊子は 10 ページ，答案用紙は５ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に**受験番号**を記入し，下の枠内には受験番号の**下２桁**の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に明瞭に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題冊子および答案用紙は切りはなさないこと。
6. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

試験問題は，つぎのページより始まります。

1 (60 点)

xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく．a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする．

(1) 点 P の座標を求めよ．

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{2}$ (60点)

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$, $g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする.

$$f'(t) = -f(t)g(t), \quad g'(t) = \{f(t)\}^2,$$
$$f(t) > 0, \quad |g(t)| < 1, \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 0.$$

このとき,

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \quad q(t) = \log \frac{1 + g(t)}{1 - g(t)}$$

とおく.

(1) $p'(t)$ を求めよ.

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} g(t)$ を求めよ.

(4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して, 媒介変数表示された平面曲線 $(x, y) = \bigl(f(t), g(t)\bigr)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ の長さを求めよ.

（下　書　き　用　紙）

3 (60 点)

xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(a, 0)$，$\mathrm{B}(0, b)$，$\mathrm{C}(-a, 0)$（ただし $0 < a < b$）をとる．点 A，B を通る直線を ℓ とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする．さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする．以下，$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする．

(1) 点 A_n，C_n の座標を求めよ．

(2) $\triangle \mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}$ を求めよ．

（下　書　き　用　紙）

4 (60 点)

n を正の整数とし，$C_1, \dots, C_n$ を n 枚の硬貨とする．各 $k = 1, \dots, n$ に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1 - p_k$ とする．この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える．

(1) $p_k = \dfrac{1}{3}$ $(k = 1, \dots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ．

(2) $p_k = \dfrac{1}{2(k+1)}$ $(k = 1, \dots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ．

(3) $n = 3m$（m は正の整数）で，$k = 1, \dots, 3m$ に対して

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{3m} & (k = 1, \dots, m) \\[2mm] \dfrac{2}{3m} & (k = m+1, \dots, 2m) \\[2mm] \dfrac{1}{m} & (k = 2m+1, \dots, 3m) \end{cases}$$

とする．このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\displaystyle\lim_{m \to \infty} Z_{3m}$ を求めよ．

（下　書　き　用　紙）

5 (60 点)

整数の組(a, b)に対して2次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える．方程式 $f(x) = 0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n = 1$ となる正の整数 n が存在するような組(a, b)をすべて求めよ．

（下　書　き　用　紙）