（令和６年度　学士課程）

総合型選抜
（工学院）

総合問題（筆記）

１２０分

注意事項

１．試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。

２．本問題冊子は５ページ（表紙等を含まない），答案用紙は８ページである。

３．各答案用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。

４．すべての問題に解答すること。

５．解答はすべて各答案用紙の所定欄に記入すること。裏面は使用しないこと。

６．答案用紙の冊子は切りはなさないこと。

問題 1

問 1 ある窓口に客が到着する状況を考える。客は以下の 3 つの性質を満たすように到着する。

(i) 十分に小さい時間間隔を考えるとき，到着客は高々1 人である。つまり，同時に 2 人以上到着しない。図 1-1 の Δt のように微小な時間間隔をとれば，その時間内に到着する客は 1 人を超えない。

(ii) 重なりのない 2 つの時間区間を考えるとき，それぞれの区間での到着状況は独立である。すなわち，図 1-1 の区間 1 での到着状況が区間 2 での到着状況に影響を与えることはない。

(iii) ある時間の間の到着客数の分布は時間の長さ（時間長）だけに依存し，開始時刻がいつであるかには依存しない。つまり，図 1-1 において区間 1 と区間 2 の長さが等しければ，それぞれの区間の開始時刻に関係なく区間 1 と区間 2 の到着客数の分布は等しい。

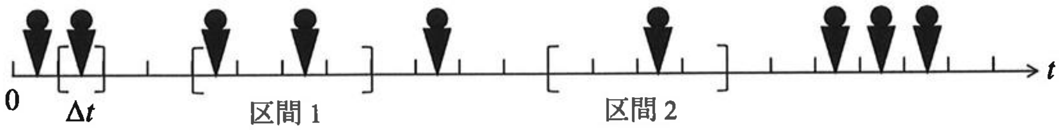

図 1-1 到着の性質（到着する様子の例）

時間長 t の時間区間において到着している客の数をある分布に従う確率変数 $X(t)$ とする。ただし，$X(t)$ は非負の整数値であり，$X(0)=0$ とする。また，単位時間あたりに到着する客数の平均は λ であるとし，時間長 t の時間区間に k 人到着する確率を $\mathrm{P}[X(t)=k]$ とする。このとき，以下の小問 (A)，(B) に答えよ。

(A) 時間長 t を n 等分する。上記の性質を満たす場合，性質 (i) から n をある程度大きくとれば各区間において客は高々1 人しか到着しない。性質 (ii) および (iii) より，どの区間においても 1 人の客が到着する確率は同じである。また性質 (iii) より，各区間（時間長 t/n）において 1 人の客が到着する確率は $\lambda t/n$ であり，各区間において客が到着しない確率は $\boxed{\text{(ア)}}$ である。時間長 t の間に k 人到着する確率を考えるので，n 個の微小区間のうち到着がある区間が $\boxed{\text{(イ)}}$ 個，到着がない区間が $\boxed{\text{(ウ)}}$ 個である。このことから，時間長 t を n 個に分割したときの，時間長 t の時間区間に k 人到着する確率 $\mathrm{P}_n[X(t)=k]$ は

$$\mathrm{P}_n[X(t)=k] = {}_n\mathrm{C}_{\boxed{\text{(イ)}}} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^{\boxed{\text{(イ)}}} \boxed{\quad\text{(ア)}\quad}^{\boxed{\text{(ウ)}}} = \boxed{\qquad\qquad\text{(エ)}\qquad\qquad}$$

で表せる。

上記の (ア) から (ウ) を埋め，式 (エ) を導出せよ。

(B) 式 (エ) において，時間長 $t=1$ を無限に分割する。つまり n を無限に大きくする。このとき，単位時間あたり k 人到着する確率は

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n[X(1)=k] = \frac{\boxed{\quad\text{(カ)}\quad}^{\boxed{\text{(キ)}}}}{\boxed{\quad\text{(オ)}\quad}\,!} e^{\boxed{\text{(ク)}}}$$

と表せる。

上記の (オ) から (ク) を埋めよ。また，その導出過程を示せ。ただし，(オ) から (ク) には同じものが入ってもよいこととし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ を用いてよい。

問 2 入り口が 2 つあり，それぞれの入り口から客が到着することを考える。入り口 1 から到着する客は，単位時間あたりに到着する客数の平均が λ_1 である問 1 の小問 (B) で求めた確率分布に従う。この確率変数を X_1 とする。入り口 2 から到着する客は，単位時間あたりに到着する客数の平均が λ_2 である問 1 の小問 (B) で求めた確率分布に従う。この確率変数を X_2 とする。また，X_1, X_2 は互いに独立である。このとき，単位時間あたりに窓口に k 人が到着する確率 $\mathrm{P}[X_1+X_2=k]$ を求めよ。ここで $X_1=\ell$ とおくと，$X_1+X_2=k$ である確率は $X_1=\ell$ かつ $X_2=k-\ell$ である確率となることに着目するとよい。さらに，二項定理を利用して式を変形せよ。

問 3 窓口への客の到着は問 1 で扱った状況であり，単位時間あたり到着する客数の平均が λ であるとする。

時刻 0 から窓口でのサービスの提供が開始される。単位時間あたりにサービスを受け終わる客数の平均は μ であるとし，サービスを受けた客は退出するものとする。すなわち，1 人あたりサービスを受け始めてから終了するまでの時間の平均は $1/\mu$ である。先に到着した客からサービスを受けるものとし，図 1-2 のようにサービスを受けるまで並んで待つスペース（待合スペース）には制限がないものとする。時刻 t にまだサービスを受け終わっていない人数（系内人数）が k 人である確率を $P_k(t)$ とする。

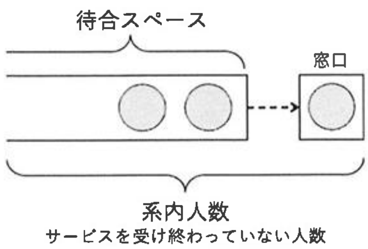

図 1-2 待合スペースが無限にある窓口

(A) 微小時間 Δt を考える。この微小時間 Δt の間には到着と退出は同時に起こらないことに注意すると，$P_0(t+\Delta t)$ は

- 時刻 t に 0 人いる状態で Δt の間に客が誰も到着しない確率と
- 時刻 t に 1 人いる状態で Δt の間にその客がサービスを終えて退出する確率

の和であり，

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t$$

となる。$k>0$ について $P_k(t+\Delta t)$ を $P_h(t)$ の漸化式で表せ。ただし，h は $k-1$，k，$k+1$ から必要なものを選んで使用せよ。

次に，$\alpha = \lambda/\mu$ とする。これは，単位時間あたりに到着する客数の平均を退出する客数の平均で割ったものであり，α が 1 より大きいと到着客を窓口がさばき切れず時間が経過するにつれて系内人数が増え続ける。一方，$\alpha < 1$ のとき十分時間が経過すると確率 $P_k(t)$ は一定の分布に収束することが知られており，この収束先での状態を定常状態という。定常状態における，系内人数が k 人である確率 $p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$ について考える。

定常状態では系内人数が k 人である確率 $P_k(t)$ は時間によって変化しない。つまり，$\frac{dP_k(t)}{dt} = 0$ である。このことと小問 (A) で求めた式から，以下の小問に答えよ。

(B) p_1 を α と p_0 を用いた式で表せ。

(C) p_k を α，k，p_0 を用いた式で表せ。

(D) 小問 (B) および (C) で求めた式から，p_k を α と k の式で表せ。

(E) 系内人数の平均を α の式で表せ。

この数理モデルは，顧客へのサービスが適正に行われるための窓口数や，工業製品の製造過程におけるリードタイムの評価，計算機内でジョブが処理を待つ時間の算出にも用いられる。

問題2

ピタゴラスは，図2-1のような箱に弦を一本張ったモノコードという楽器を用いて音階にかかわる研究をした。ここでは弦の基本振動のみに着目し，弦の振動が発する音と音階について考えてみよう。なお，問5以外では，弦に作用する抵抗力は無視せよ。

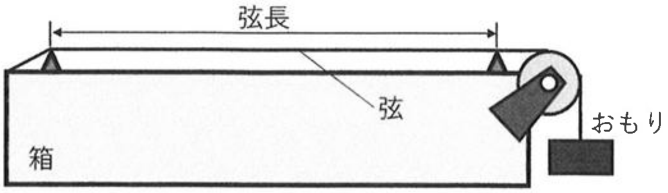

図2-1

まず，弦長をLにして弦をはじくと，周波数fの音がでた。この音を基準音「ド」とする。次に張力を一定に保ったまま弦長を$L/2$にすると周波数$2f$の音が，$L/4$にすると$4f$の音がでた。これらの音をそれぞれド*，ド**と定義する。2つ以上の音が良く調和して響くことを「協和度が高い」というが，これらの音は完全に協和し，「ド*」は「ド」に対して1オクターブ，「ド**」は2オクターブ高い音になる。

次に，「ド」と「ド*」の間の音階を考える。弦長を調整して基準音「ド」の3倍の周波数となる$3f$の音をだすと，基準音「ド」と協和度が高い音がでる。この$3f$の音を，周波数fの「ド」と$2f$の「ド*」の間の音になるように，周波数$3f$を2で割って1オクターブ下の$(3/2)f$の音にする。この$(3/2)f$の音も「ド」と協和度が高く，この音を「ソ」と定義する。次に「ソ」について，「ド」以外の協和度の高い音を「ド」と「ド*」の範囲から探す。「ソ」の音の周波数を3倍し，「ド」から「ド*」の間の音になるまで2で割り続けて（1オクターブずつ下げ続けて）新しい音を作る。これを「レ」の音と定義する。さらに同様の操作を行って「レ」の音と協和度の高い音を作り，「ラ」と定義する。協和度の高い新しい音を探していく過程を図2-2（左）に示す。同様の計算を繰り返すと，最後に「ファ」の音から基準音の1オクターブ上の音である「ド*」の音になる（実際には完全に「ド*」の音にならず誤差が生じるが，この誤差は無視された）。この時，「ド」と「ド*」の間に11個の新しい音ができる。ピタゴラスはこのようにして1オクターブを12の音階に分けた。12個の音を音が低い順から図2-2（右）に示すようにド，ド#,レ，レ#，ミ，ファ，ファ#，ソ，ソ#，ラ，ラ#，シという音名で呼ぶ。次の問に答えよ。

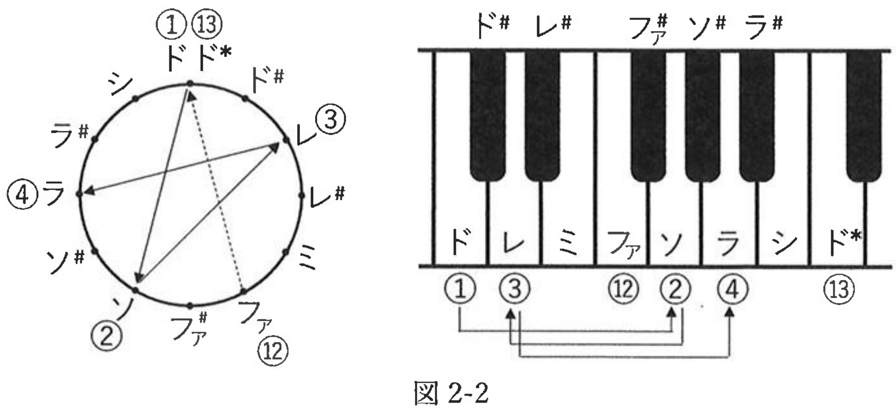

図2-2

問1　レの音の周波数を，基準音の周波数fを使って分数で表せ。

問2　図2-2（左）に示したとおり，ドからソ（①⇒②），ソからレ（②⇒③），レからラ（③⇒④）の新しい音が作られているが，この図を観察すると，新しい音と，新しい音を作る際に基となった音の間には一定の法則があることがわかる。次の問に答えよ。

(A) 上記の法則を考慮して，ミとシの基となる音名を図2-2（左）中の音名からそれぞれ答えよ。

(B) ミとシの音がでるときの弦長を，Lを使ってそれぞれ分数で表せ。

問3　モノコードの弦長を L に設定し，おもりの部分を図 2-3 のように弦の巻き取り器に変更して弦長を保ったまま弦の張力を変更できるようにする。弦をはじいたときに周波数 f の基準音がでる状態から弦を長さ x_1 巻き取ると，周波数 $2f$ の音になった。次の問に答えよ。

(A) 弦長を L に保ったまま，線密度が同じでばね定数が 2 倍の弦に変更する。周波数 f の基準音がでるように設定してから，弦を巻き取って周波数を $2f$ にする。このときの弦の巻き取り長さを x_1 を用いて表せ。

(B) 小問（A）で用いた弦を取り外して元の弦に戻し，弦長を $2L$ に変更する。周波数 f の基準音がでるように設定してから，弦を巻き取って周波数を $2f$ にする。このときの弦の巻き取り長さを x_1 を用いて表せ。

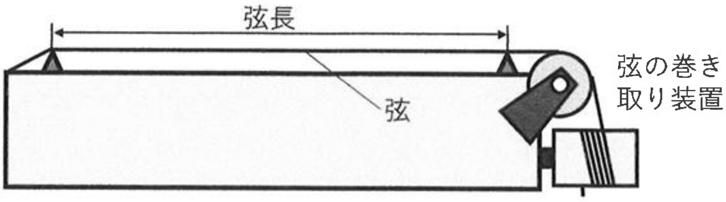

図 2-3

問4　図 2-3 のモノコードを 2 つ用意し，ばね定数が K で線密度が ρ の弦をとりつけて弦長を L に設定する。また，弦をはじいたときにどちらのモノコードからも周波数 f の基準音がでるように設定する。次に，片方のモノコードのみについて，弦長を L に保ったまま弦を長さ x_2 だけ巻き取る。二つのモノコードを同時に弾いたところ，毎秒 3 回のうなりが聞こえた。x_2 を f, L, K, ρ を使って表せ。

問5　モノコードの弦は，振動時に抵抗力を受け，振動の振幅は時間の経過とともに小さくなり，最後は止まる。このような現象を減衰振動という。この問では減衰振動も考慮した音について考えてみよう。抵抗力を考慮した場合の弦の振動は図 2-4（左）のようにおもさ m のおもり，ばね定数 K_s のばねとダンパーを用いて単純化できる。ダンパーは速度に比例して抵抗力を発生させる要素であり，その比例定数を C（$C \geqq 0$）とする。弦の特定の箇所の時間 t における振動変位を $y(t)$ とすると，弦の速度は $y(t)$ を時間 t で微分すると得られ，さらに速度を t で微分すると加速度が得られる。おもりに初期変位 y_0 を与え，そこから静かに手を放しておもりを自由振動させることを考える（初期速度 0）。ただし，重力加速度は無視できるものとする。次の問に答えよ。

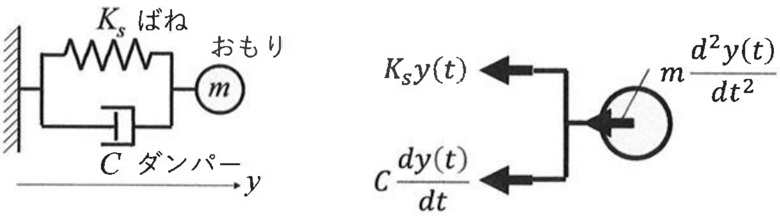

図 2-4

(A) ある時刻 t に，おもりが y 軸の正方向に変位した際におもりに生じている力のベクトルを図 2-4（右）に示す。$K_s y(t)$ と $C\frac{dy(t)}{dt}$ はそれぞればねとダンパーからうける力，$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ はおもりに働く慣性力である。これらの 3 つの力がつり合っていることを考えると，$y(t)$ は次式を満たす。（ア）に当てはまる適切な式を答えよ。

$$\boxed{（ア）} + C\frac{dy(t)}{dt} + K_s y(t) = 0$$

(B) 以下の文章中の（イ）に当てはまる適切な式と，（ウ）に当てはまる適切な数値を答えよ。

次式で表される $y(t)$ は小問(A)の力のつり合いに関する方程式の解の一つである。

$$y(t) = A_1 e^{-\frac{C}{2m}t}\cos(2\pi f_c t - A_2) \quad ただし，f_c = \frac{\sqrt{4mK_s - C^2}}{4\pi m}$$

ここでf_Cはおもりの固有振動数，A_1は正の定数，A_2は定数である。ダンパーがない場合の固有振動数は$\boxed{（イ）}$であるが，この式から，ダンパーが存在すると固有振動数が変化することがわかる。次に$y(t)$が時間とともにどのように変化するかを考える。$y(t)$は$A_1e^{-\frac{C}{2m}t}$と$\cos(2\pi f_c t - A_2)$の積となっている。A_1は正の定数なので，$A_1e^{-\frac{C}{2m}t}$は時間tとともに減少する関数である。$\cos(2\pi f_c t - A_2)$は時間とともに－1から$\boxed{（ウ）}$の範囲で振動する関数である。したがって，$y(t)$は図 2-5 のように振動しながら時間とともに減衰していく関数となる。

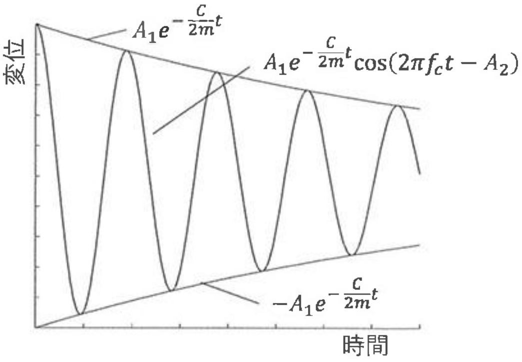

図 2-5

(C) 以下の文章について，（エ）と（キ）に当てはまる振動の様子を図 2-6 の選択肢①～⑥からそれぞれ選べ。また，（オ），（カ），（ク），（ケ）に当てはまる最も適切な用語を選択肢(a)～(e)から選択せよ。選択肢は重複して使用してもよい。

比例定数Cを 0 にしたとき図 2-5 の振動（元の振動）の様子は，図 2-6 の$\boxed{（エ）}$のようになり，モノコードの音の高さは$\boxed{（オ）}$。また，音が聞こえなくなるまでの時間は$\boxed{（カ）}$。$C^2 < 4mK_s$の範囲でCを大きくしたときの振動の様子は，図 2-6 の$\boxed{（キ）}$のようになり，モノコードの音の高さは$\boxed{（ク）}$。また，音が聞こえなくなるまでの時間は$\boxed{（ケ）}$。なお，図 2-6 の破線は図 2-5 に示した元の振動の様子であり，実線がCを変更した後の振動の様子である。

（エ）と（キ）の選択肢：

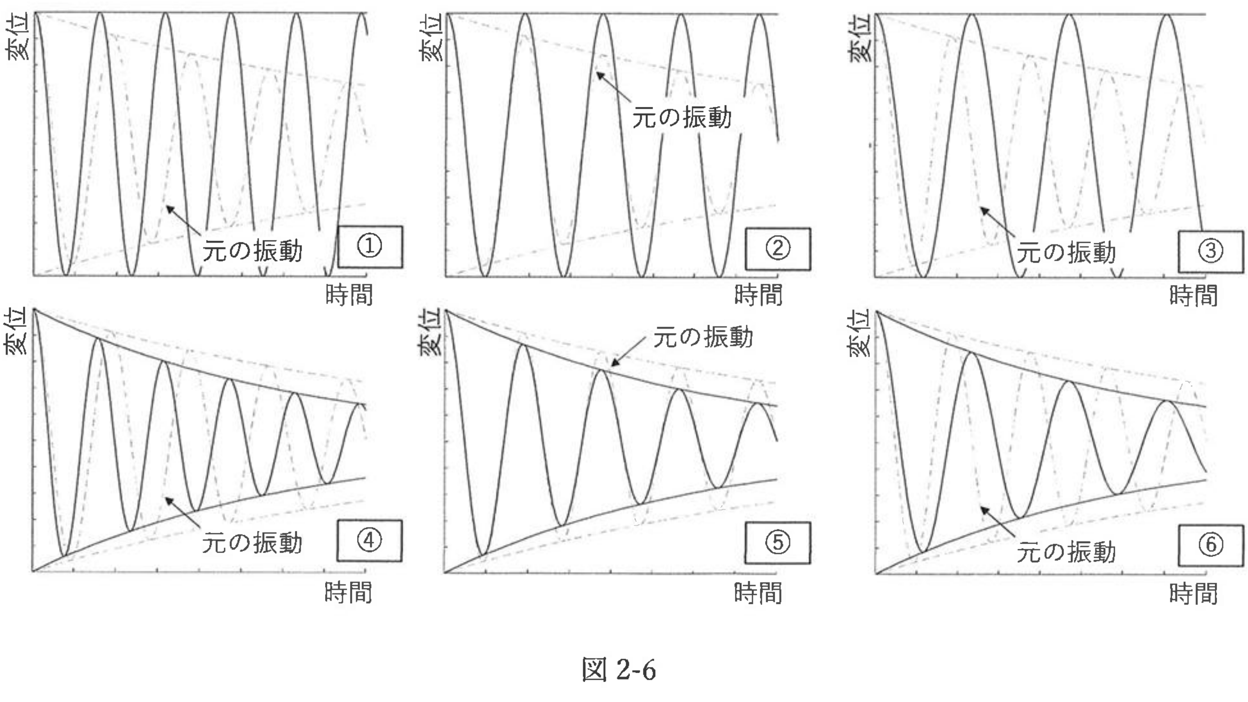

図 2-6

（オ），（カ），（ク），（ケ）の選択肢：

(a)：変わらない　(b)：高くなる　(c): 低くなる　(d)：長くなる　(e): 短くなる