（令和５年度　学士課程）

総合型選抜
（工学院）

総合問題（筆記）

１２０分

注意事項

１．試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。

２．本問題冊子は６ページ（表紙等を含まない），答案用紙は９ページである。

３．各答案用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。

４．すべての問題に解答すること。

５．解答はすべて各答案用紙の所定欄に記入すること。裏面は使用しないこと。

６．答案用紙の冊子は切りはなさないこと。

問題 1

問 1 ある事象の確率変数θが$0 \leqq \theta \leqq \pi$の範囲に分布し，確率密度関数が

$P(\theta) = \dfrac{1}{a} e^{x\cos\theta}(\sin\theta)$ で与えられるとき，以下の問に答えよ。

(A) $\cos\theta$の期待値pを式(1-1)で表すとき，この定積分を求めよ。ただし，a，xを0でない定数とする。

$$p = \int_0^{\pi} (\cos\theta) \frac{1}{a} e^{x\cos\theta}(\sin\theta) d\theta \qquad (1\text{-}1)$$

次にxが0に近いときの近似式について考える。(A)の答は$\int_0^{\pi} P(\theta) d\theta = 1$となるように$a$を定めると，次のように関数$L(x)$で表されることが知られている。

$$p = L(x), \qquad L(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x} \qquad (1\text{-}2)$$

$L(x)$の形はn次多項式ほどには単純でない。そこで，$L(x)$が1次の近似式(1-3)で表されるとき，適切な定数a_0とa_1を以下の手順で求めてみよう。

$$L(x) \fallingdotseq a_0 + a_1 x \qquad (1\text{-}3)$$

2つの関数$h(x)$，$s(x)$の値が$x = 0$で等しいとする。第1次導関数も$x = 0$で等しければ，傾きも等しいという意味で2つの関数は似ている。加えて，第2次導関数も等しければ曲がり方も似てくる。さらに，高次導関数まで等しければ，もっとよく$s(x)$で$h(x)$を近似できる。その具体例として，図 1-1 に$h(x) = \sin x$と$x = 0$で第k次導関数まで等しい関数$s_k(x)$を$k = 1$，3，5の場合について示す。この説明を参考に次の問に答えよ。

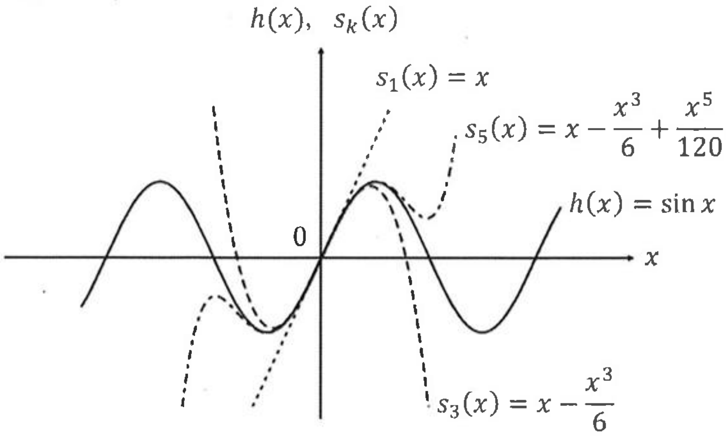

図 1-1

(B) $x=0$ で $f(x)=e^x$ に第3次導関数まで等しい $g(x)$ について，
$g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ と表したとき，定数 c_0，c_1，c_2，c_3 の値を求めよ。

(C) (B)で得られた結果を用いて，式(1-2)の e^x に $g(x)$，e^{-x} に $g(-x)$ を代入し，その関数が微分可能で $|x|$ が十分小さいとして式(1-3)の a_0 と a_1 の値を求めよ。

問２　次に，期待値 p が t （$\geqq 0$）の関数である場合を考え，その特徴を表す値 F（>0）に注目して以下の問に答えよ。

(A) Fを定数とするとき，p のグラフは 図 1-2 の実線のように $t=0$ の値 p_0（$>a_0$）から単調減少して $t\to\infty$ で p の値が限りなく a_0に近づく。

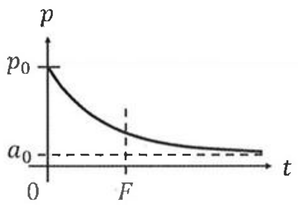

図 1-2

このグラフを表す適切な関係を①～④から選び，理由を説明せよ。

① $\dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{p-a_0}{F}$　　② $\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{p-a_0}{F}$

③ $\dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{F}{p-a_0}$　　④ $\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{F}{p-a_0}$

定数 F を関数 $F(t)$ に置き換えて(A)の関係を解き，p の変化についての関数 $y(t)$ が式(1-4)で表される場合を考える。ただし，b は正の定数とし，$t>0$ とする。図 1-3 に $y(t)$ のグラフを示す。

$$y(t)=be^{-\left(\frac{1}{t}+\int_0^t\frac{du}{F(u)}\right)} \qquad (1\text{-}4)$$

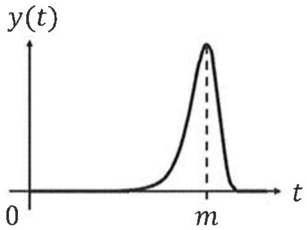

図 1-3

(B) $y(t)$ を t で微分し，$t=m$ を境として $y(t)$ が増加の状態から減少の状態に変わる特徴を利用して $F(m)$ を求めよ。

問題2

図 2-1 に示すような単体のアンテナを複数並べて構成されるフェーズドアレイアンテナは，各アンテナからの放射電磁波の位相を制御することで，機械的な機構を用いることなく放射方向を変え，局所的に電磁波を送信することができる。このフェーズドアレイアンテナは現在レーダーなどに利用され，将来的には移動体通信へ活用される見込みであり，現代社会において重要な技術となっている。動作原理はアンテナを波源とみなしたホイヘンスの原理によって理解できる。問題では，必要に応じて，$|a| \ll 1$において成り立つ$\sqrt{1+a} \fallingdotseq 1+\frac{a}{2}$，および，$1+a^2 \fallingdotseq 1$の近似，また，表 2-1 に示す三角関数の公式を用いよ。

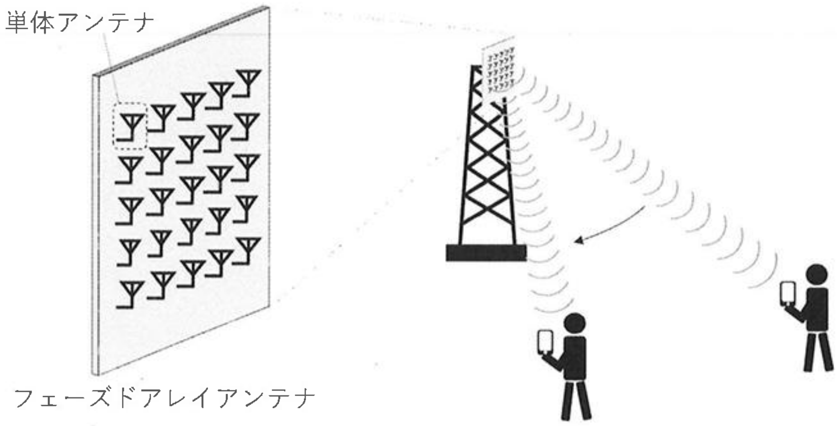

図 2-1 フェーズドアレイアンテナによる電磁波放射方向の制御

表 2-1 三角関数の公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

図 2-2 に示すように，z軸に平行な板上の原点に微小な単体アンテナA_1が設置されている。A_1は模式的に白抜きの丸で示されている。仮想的にA_1からは $+x$方向の空間に半球状に波長λの電磁波が光速cで放射されるものとする。このとき，xz平面の原点から距離Lだけ離れた円周上の点Pにおける電場を考える。$\lambda \ll L$であり，点PとA_1を結ぶ線分A_1Pとx軸のなす角をαとする。$-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$の範囲で電場は接線方向成分$E_1$のみであり，ある時刻$t$において$E_1 = E\sin\omega t$のように$\alpha$に依存しない式であらわせたとする。ここで，$E$は電場の振幅，$\omega$は電磁波の角周波数である。以下の問に答えよ。

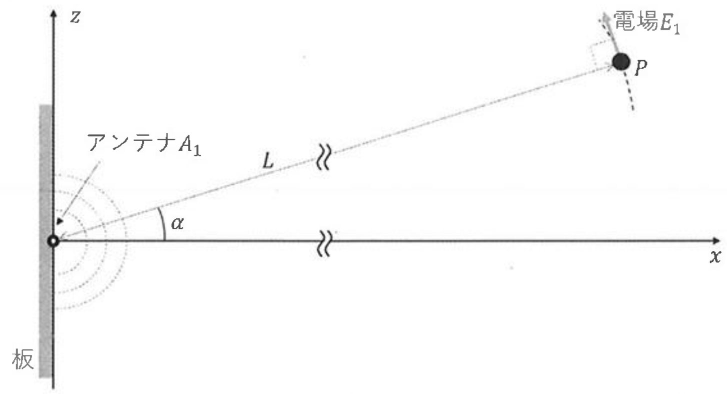

図 2-2　微小単体アンテナから電磁波が放射される様子

問1 ωとλの関係を答えよ。

問2以降の問題では導出過程においてωは用いて良いが，解答にはωを用いないこと。

問2 次に，図 2-3 のようにA_1と同じ性能の単体アンテナA_2をA_1から距離d_1だけ離して設置し，同波長で同位相の電磁波を放射させた。ただし，$d_1 \ll L$であり，これにより，点PにおいてA_2からの電磁波のみで生じる電場E_2は，E_1と同じ向きで，経路差を$\Delta L = A_2P - A_1P$として，$E_2 = E\sin\left(\omega t - \frac{2\pi\Delta L}{\lambda}\right)$となる。このとき，点$P$の接線方向の電場は重ね合わせの原理を用いて$E_1 + E_2$と求めることができる。$-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$の範囲で$E_1 + E_2$の振幅を$L$を用いずに答えよ。

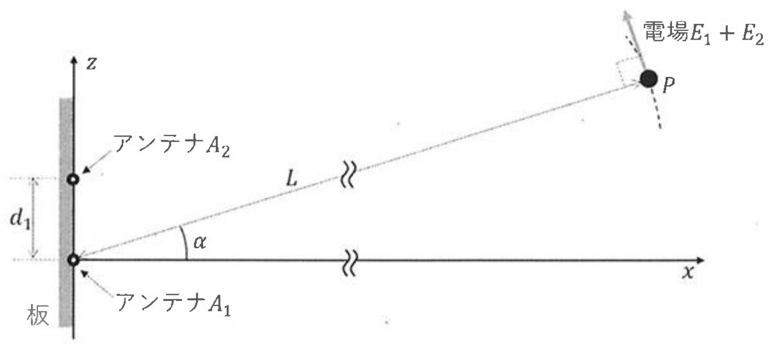

図 2-3　アンテナが 2 つの場合

問3 問2の状態で，$-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$の範囲の点$P$において，波の強め合う$\alpha$が 1 つだけになり，かつ，$\alpha$が$\pm\frac{\pi}{2}$のときは波が弱め合ったとする。このときの$d_1$を$\lambda$を用いて答えよ。また，この条件において，$\alpha$に対する$E_1+E_2$の振幅の 2 乗の概形として適当なグラフを図 2-4 の①～④から選ぶと共に，$\alpha=0$における振幅の 2 乗の値を答えよ。なお，図 2-4 のグラフは最大点を揃えて描かれており，数値を正しく示すものではない。

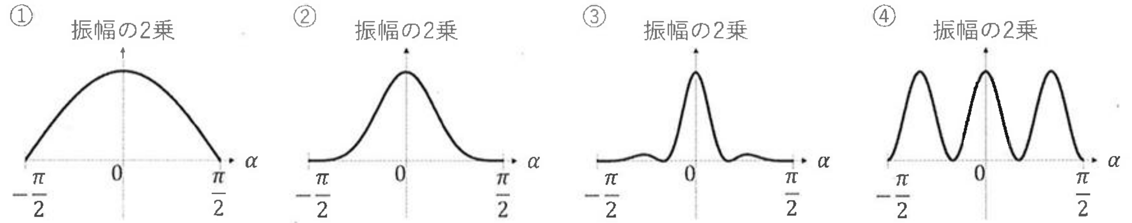

図 2-4　αに対する振幅の 2 乗の変化

問4 問3の状態で，A_1に対するA_2の放射電磁波の位相を$-\beta$だけ変化させると，$\alpha=\alpha_1$の点PにおいてE_1+E_2の振幅が最大となった。三角関数の周期性に注意し，jを整数としてβをLを用いずに答えよ。ただし，$-\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$ とする。

問5 今度は，問3の状態から，図 2-5 のようにA_1と同じ性能の単体アンテナA_3，A_4を新たに距離d_1ずつ離して追加した。ただし，$3d_1 \ll L$であり，これにより，点PにおいてA_3もしくはA_4からの電磁波のみで生じる電場E_3，E_4は，E_1と同じ向きで振幅も同じEとみなすことができる。A_1~A_4からすべて同波長で同位相の電磁波を放射させた場合において，点Pにおける接線方向の電場$E_1+E_2+E_3+E_4$の振幅をLを用いずに答えよ。また，αに対する振幅の 2 乗の概形として適当なグラフを図 2-4 の①～④から選ぶと共に，$\alpha=0$における振幅の 2 乗の値を答えよ。

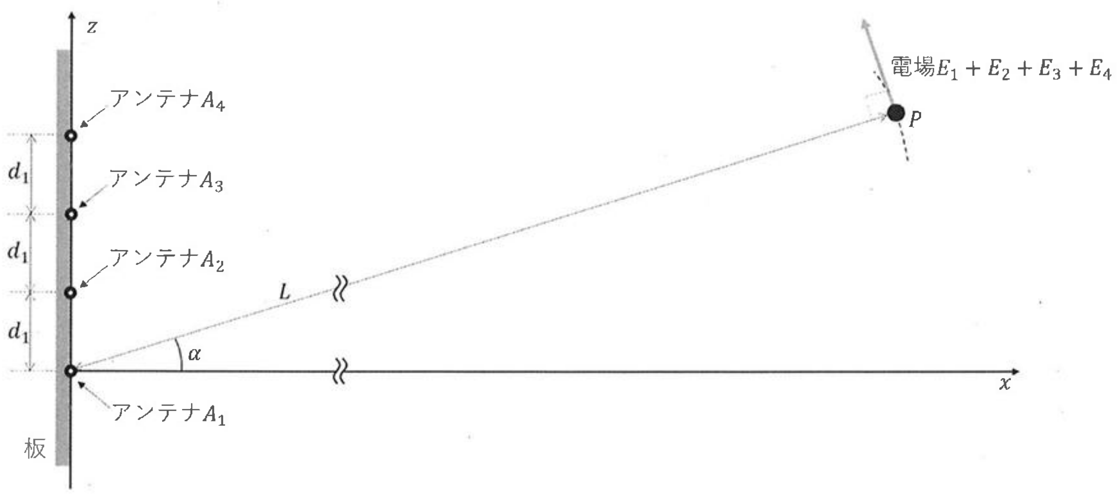

図 2-5 アンテナが 4 つの場合

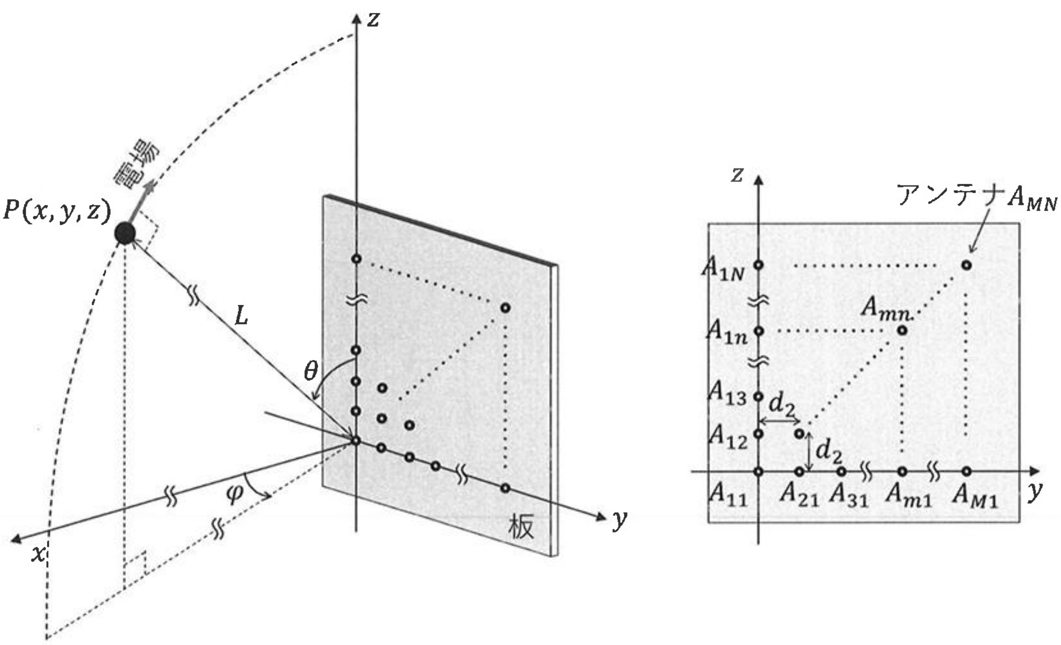

図 2-6　複数の単体アンテナを 2 次元的に配列した場合

次に，図 2-6 に示すように，A_1と同じ性能の$M \times N$個の単体アンテナA_{11}~A_{MN}を，A_{11}を原点としてy方向とz方向に距離d_2ずつ離して板上に 2 次元的に配置した。ただし，$(M-1)d_2 \ll L$，$(N-1)d_2 \ll L$である。このとき，原点から距離Lだけ離れた$0 \leqq \theta \leqq \pi$ かつ$-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲の点$P(x, y, z)$において電磁波がすべて強め合うように，各アンテナの位相を個別に調整していくことにする。以下の問に答えよ。なお，個別に動作させたとき，各アンテナからは$+x$方向の空間に半球状に波長λの電磁波が放射され，点Pの電場は角度φで半径Lの円の接線方向成分のみで同じ向きであり，振幅はθ，φに依存せずEであるとする。

問6 点Pの座標(x, y, z)をL，θ，φであらわせ。

問7 A_{11}とその他の任意のアンテナA_{mn}（ただし，$1 \leq m \leq M$，$1 \leq n \leq N$）からの電磁波が点Pで強め合うために，A_{11}に対するA_{mn}の放射電磁波の位相を$-\beta_{mn}$だけ変化させた。β_{mn}をLを用いずに答えよ。ただし，kを整数とする。また，この位相調整をすべてのアンテナに行った際の点Pにおける振幅の 2 乗の値を答えよ。