

# 数 学

180 分

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は10ページ、答案用紙の冊子は5ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し、下の枠内には受験番号の下2桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に明瞭に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は300点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は、下記の例にならひ、明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

**1** (60点)

$a, b$  を実数とし,  $f(z) = z^2 + az + b$  とする.  $a, b$  が

$$|a| \leq 1, \quad |b| \leq 1$$

を満たしながら動くとき,  $f(z) = 0$  を満たす複素数  $z$  がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ.

(下書き用紙)

**2**

(60 点)

3つの正の整数  $a, b, c$  の最大公約数が 1 であるとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $a + b + c, bc + ca + ab, abc$  の最大公約数は 1 であることを示せ.
  
- (2)  $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^3 + b^3 + c^3$  の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ.

(下 書 き 用 紙)

**3**

(60点)

$\alpha$  は  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  を満たす実数とする.  $\angle A = \alpha$  および  $\angle P = \frac{\pi}{2}$  を満たす直角三角形 APB が, 次の 2 つの条件 (a), (b) を満たしながら, 時刻  $t = 0$  から時刻  $t = \frac{\pi}{2}$  まで  $xy$  平面上を動くとする.

(a) 時刻  $t$  での点 A, B の座標は, それぞれ  $A(\sin t, 0)$ ,  $B(0, \cos t)$  である.

(b) 点 P は第一象限内にある.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 点 P はある直線上を動くことを示し, その直線の方程式を  $\alpha$  を用いて表せ.

(2) 時刻  $t = 0$  から時刻  $t = \frac{\pi}{2}$  までの間に点 P が動く道のりを  $\alpha$  を用いて表せ.

(3)  $xy$  平面内において, 連立不等式

$$x^2 - x + y^2 < 0, \quad x^2 + y^2 - y < 0$$

により定まる領域を  $D$  とする. このとき, 点 P は領域  $D$  には入らないことを示せ.

(下書き用紙)

**4**

(60点)

$a$  は正の実数とする. 複素数  $z$  が  $|z - 1| = a$  かつ  $z \neq \frac{1}{2}$  を満たしながら動くとき, 複素数平面上の点  $w = \frac{z - 3}{1 - 2z}$  が描く図形を  $K$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $K$  が円となるための  $a$  の条件を求めよ. また, そのとき  $K$  の中心が表す複素数と  $K$  の半径を, それぞれ  $a$  を用いて表せ.
- (2)  $a$  が (1) の条件を満たしながら動くとき, 虚軸に平行で円  $K$  の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ.

(下書き用紙)

5 (60点)

$a$  は  $0 < a \leq \frac{\pi}{4}$  を満たす実数とし,  $f(x) = \frac{4}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - ax\right)$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式(\*)を満たす  $a$  がただ 1 つ存在することを示せ.

$$(*) \quad \int_0^1 f(x) dx = 1$$

(2)  $0 \leq b < c \leq 1$  を満たす実数  $b, c$  について, 不等式

$$f(b)(c-b) \leq \int_b^c f(x) dx \leq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の試行を考える.

[試行]  $n$  個の数  $1, 2, \dots, n$  を出目とする, あるルーレットを  $k$  回まわす.

この[試行]において, 各  $i = 1, 2, \dots, n$  について  $i$  が出た回数を  $S_{n,k,i}$  とし,

$$(**) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx$$

が成り立つとする. このとき, (1)の等式(\*)が成り立つことを示せ.

(4) (3)の[試行]において出た数の平均値を  $A_{n,k}$  とし,  $A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n,k}$  とする.

(\*\*)が成り立つとき, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n}$  を  $a$  を用いて表せ.

(下書き用紙)