

総合型選抜 (工学院)

総合問題 (筆記)

120分

注意事項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は5ページ(表紙等を含まない)、答案用紙は7ページである。
3. 各答案用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。
4. すべての問題に解答すること。
5. 解答はすべて各答案用紙の所定欄に記入すること。裏面は使用しないこと。
6. 答案用紙の冊子は切りはなさないこと。

問題 1

ある物体に対して、角周波数 a [rad/s] ($a \geq 0$) の正弦波 $u(t) = \sin at$ [N] の力を加えるとする。ここで、 t [s] は時間を表す。いま、任意の角周波数 a [rad/s] に対して、十分時間が経過したのち、物体の速度 $v(t)$ [m/s] が、加えた力と同じく角周波数 a [rad/s] の正弦波を描いたとする。例えば、 $a = 1$ [rad/s] に対する図 1-1 の力を加えたときの物体速度が図 1-2 の実線、 $a = \sqrt{3}$ [rad/s] に対する図 1-3 の力を加えたときの物体速度が図 1-4 の実線のような波形を示すとする。

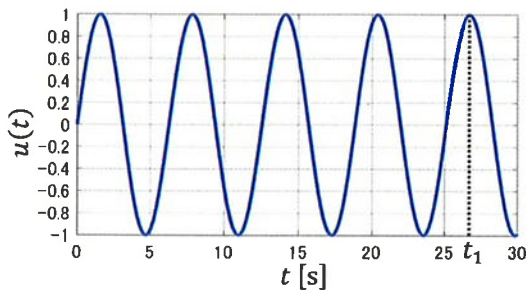


図1-1 $a = 1$ [rad/s] に対する力
 $u(t)$ [N]

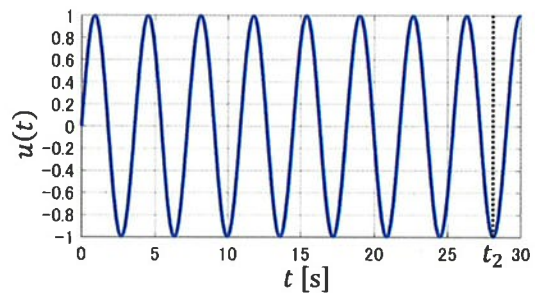


図1-3 $a = \sqrt{3}$ [rad/s] に対する力
 $u(t)$ [N]

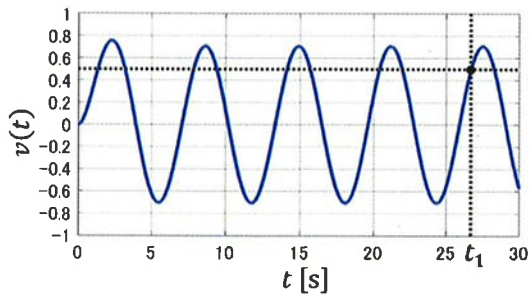


図1-2 図 1-1 の力に対する物体速度
 $v(t)$ [m/s]

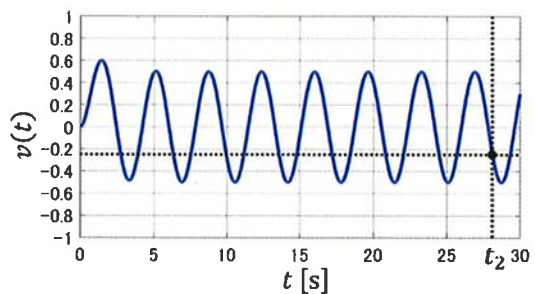


図1-4 図 1-3 の力に対する物体速度
 $v(t)$ [m/s]

また、 $v(t)$ の振幅と、 $u(t)$ との位相差は角周波数 a によって異なる。実は、十分時間が経過した後の物体速度 $v(t)$ は、 a に依存するある複素数 $z(a)$ を用いて、

$$v(t) = |z(a)| \sin\{at + \arg z(a)\} \quad (1-1)$$

と表すことができる。ここで、 $|z(a)|$ は複素数 $z(a)$ の絶対値、 $\arg z(a)$ は $z(a)$ の偏角を表す。すなわち、この物体の運動特性は複素数 $z(a)$ によって特徴づけられ、 a を連続

的に変化させたときに $z(a)$ が複素数平面上に描く軌跡によって物体の運動特性を可視化できる。以下の問いに答えよ。なお、 i は虚数単位とする。

問 1

(A) 複素数

$$z_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{3}i}$$

を極形式で表せ。また、 z_1 を複素数平面上に記せ。

(B) 0以上の実数 a を含む複素数

$$z_2(a) = \frac{1}{1 + ai} = x + yi$$

を考える。 x と y はそれぞれ $z_2(a)$ の実部および虚部を表し、これらは a の値によって変化する。いま、 a を 0 から ∞ まで連続的に変化させると、 $z_2(a)$ は複素数平面上にある軌跡を描く。その軌跡が描く曲線の方程式を示せ。

(C) 式(1-1)中の $z(a)$ を $z(a) = z_2(a)$ とする。いま、図 1-1, 1-2 中の時間 t_1 および図 1-3, 1-4 中の時間 t_2 では十分時間が経過したとみなしてよいものとする。このとき、図 1-2 における $v(t_1)$ 、図 1-4 における $v(t_2)$ がそれぞれ式(1-1)によって与えられることを示せ。

問 2 0以上の実数 a を含む複素数

$$z_3(a) = \frac{1}{(1 - a^2) + ai} = x + yi$$

を考える。 x と y はそれぞれ $z_3(a)$ の実部および虚部を表し、これらは a の値によって変化する。

- (A) a を 0 から ∞ まで連続的に変化させると、 $z_3(a)$ は複素数平面上にある軌跡を描く。その軌跡と虚軸の交点を与える a の値と、そのときの y の値を求めよ。
- (B) x が最小となる a の値と、そのときの x および y の値を求めよ。
- (C) (A) の軌跡の概形として適切なものを、図 1-5 の (a)～(f) の中から選択せよ。
- (D) 式(1-1)において、 $z(a) = z_3(a)$ としたときの $v(t)$ を $v_3(t)$ とおく。いま、ある $z(a) = z_4(a)$ に対して、式(1-1)の $v(t)$ が、すべての a について、 $v_3(t)$ を 1[s] だけ遅らせた正弦波であったとする。この $z_4(a)$ に対して、 a を 0 から ∞ まで連続的に変化させたときの偏角の変化を求め、それをもとに $z_4(a)$ が描く軌跡として最も適切なものを、図 1-5 の (a)～(f) の中から選択せよ。

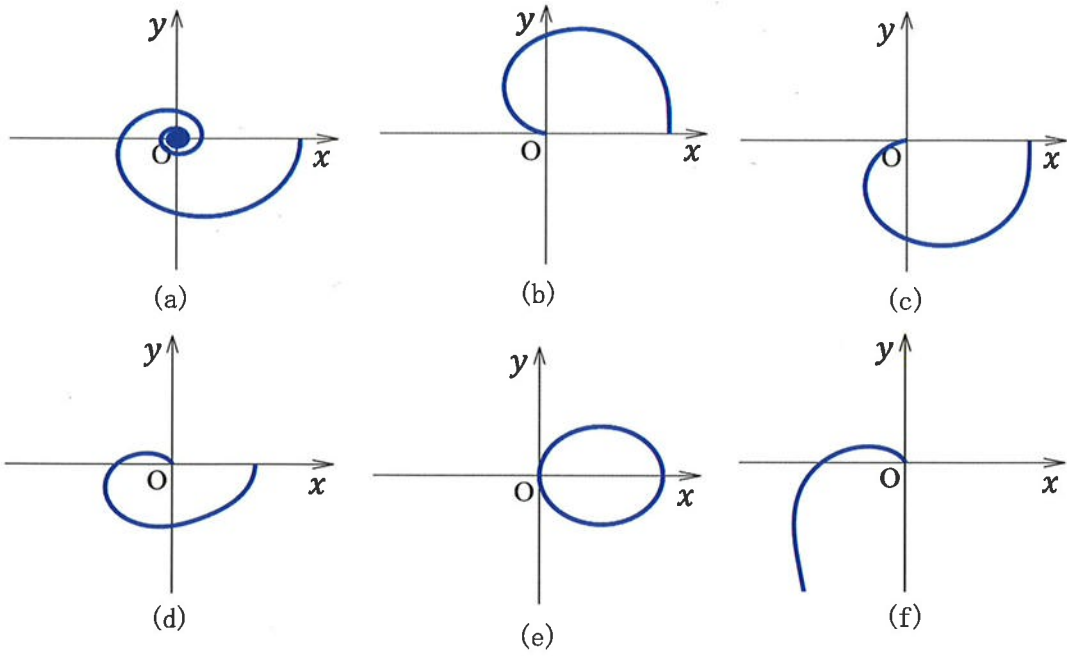


図 1-5 複素数平面における軌跡

問題2

導体棒に電圧を印加すると、導体棒の抵抗に応じた電流が流れる。一方、電流とは自由電子の運動に基づく。つまり、抵抗は自由電子の運動と関係している。電子の電荷を $-e$ [C]、電子の質量を m [kg]として、以下の問いに答えよ。なお、以下の問において、自由電子の速さは図2-1~2-3中の x 軸方向の成分を意味する。また、物理定数 e , m , および、以下の問いで説明する S , L , V , n , ρ , M , τ は変数として解答に用いてよい。解答では単位の記載は不要である。また、重力は無視する。

問1 図 2-1 に示すように均一な断面積 S [m²]で長さ L [m]の導体棒の両端に電圧 V [V]を印加する。導体棒を流れる電流は、単位時間あたりに導体棒の断面を通過する電荷の量により表されることを利用して、導体棒内の自由電子密度 n [m⁻³]、導体棒内の自由電子の平均速さ v_a [m/s]として、電流 I [A]を与えられた物理定数および変数により表せ。

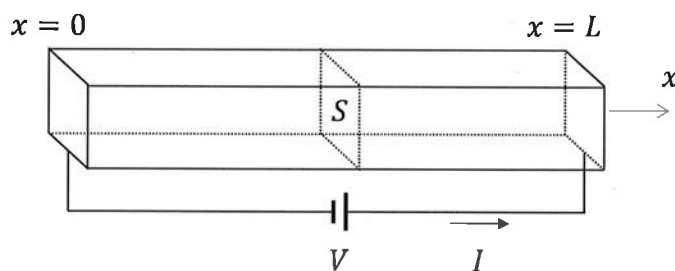


図 2-1 導体棒の両端に電圧を印加した様子

問2 導体棒に電圧 V を印加して電流 I が流れているときにオームの法則が成立している。このことを利用して、実験的に測定される図 2-1 の導体棒の抵抗率 ρ [$\Omega \cdot \text{m}$]を用いて、自由電子の平均速さ v_a を電圧 V の関数として表せ。

以下では、導体棒内の自由電子の運動を、力学モデルを仮定して考える。

問3 真空中の自由電子の運動として力学モデルを考える。図 2-2 のように真空中に 2 枚の電極を、距離 L を離して設置したモデルを考え、電極間に電圧 V を印加する。電極間に存在する自由電子には、電圧を電極間の距離で除した値(電界強度)に、自由電子の電荷を乗じた力が働く。 $x = 0$ の電極から1個の自由電子が速さ 0 で射出され、 $x = L$ の電極に到達する。このとき、電極間を移動する自由電子の平均速さ v_b [m/s]を電圧 V の関数として表せ。

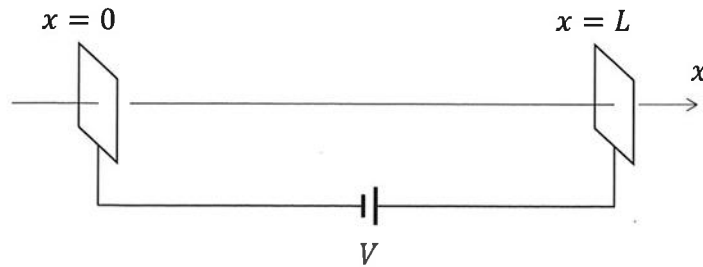


図 2-2 真空中に設置された 2 つの電極板の間を電子が運動するモデル

問4 問2の平均速さ v_a は電圧 V に比例するが、問3の平均速さ v_b は電圧 V に比例しない。つまり問3のモデルは問2の実験的に求められる導体棒内の自由電子の運動を適切に表していないと考えられる。その原因として、問3のモデルでは自由電子は障害物なく移動するが、導体棒内の自由電子は導体棒内の原子が移動の障害物になることが影響していると予想できる。そこで移動の障害物をモデル化する。

真空中に障害物に相当する厚さの無視できる $(M + 1)$ 枚の電極を、図 2-3 のように $x = 0$ から $x = L$ まで等間隔に設置したモデルを考える。図のような電圧源の接続により各電極間に電圧 V/M を印加する。 $x = 0$ の電極から1個の自由電子が速さ 0 で射出され、隣の電極に到達して止まる。すると直ちに到達した電極からこの自由電子が速さ 0 で次の電極に向けて射出され、次の電極に到達して止まることを繰り返して、 $x = L$ の電極に到達する。このとき、 $x = 0$ から $x = L$ まで移動する自由電子の平均速さ v_c [m/s]を電圧 V の関数として表せ。

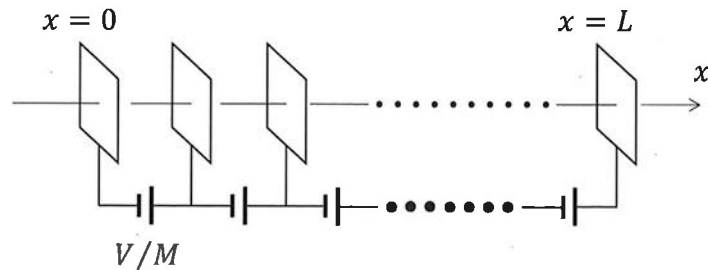


図 2-3 真空中に設置された多数の電極板の間を電子が運動するモデル

問5 問4では、障害物に相当する電極の数を仮定して自由電子の平均速さを考えた。ここではモデルを修正し、自由電子が隣の電極に到達するまでの時間 τ [s]が電圧によらずに一定と仮定して、電極の数は自由電子の平均速さに応じて変化すると考える。このとき、時間 τ を用いて、 $x = 0$ から $x = L$ まで移動する自由電子の平均速さ v_d [m/s]を電圧 V の関数として表せ。

問6 問2の平均速さ v_a と問5の平均速さ v_d はともに電圧 V に比例する。つまり問5のモデルは導体棒内の自由電子の運動をより適切に表していると考えられる。このため導体棒は電圧によらずに一定となる、問5で与えた時間 τ という物性値を持つことが想定できる。このとき、直接の測定が難しい時間 τ を実験的に測定される導体棒の抵抗率 ρ により表せ。