

# 数 学

180 分

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は10 ページ， 答案用紙の冊子は5 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し， 下の枠内には受験番号の下2桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は300点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は， 下記の例にならい， 明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

**1**

(60点)

次の問いに答えよ.

(1)  $|x^2 - x - 23|$ の値が, 3を法として2に合同である正の整数 $x$ をすべて求めよ.

(2)  $k$ 個の連続した正の整数 $x_1, \dots, x_k$ に対して,

$$|x_j^2 - x_j - 23| \quad (1 \leq j \leq k)$$

の値がすべて素数になる $k$ の最大値と, その $k$ に対する連続した正の整数 $x_1, \dots, x_k$ をすべて求めよ. ここで $k$ 個の連続した整数とは,

$$x_1, x_1 + 1, x_1 + 2, \dots, x_1 + k - 1$$

となる列のことである.

(下書き用紙)

S

（以下に記述する内容は、本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

（本稿の作成に必要となる事項を記載する。）

2 (60点)

複素数平面上の異なる3点A, B, Cを複素数 $\alpha, \beta, \gamma$ で表す. ここでA, B, Cは同一直線上にないと仮定する.

(1)  $\triangle ABC$ が正三角形となる必要十分条件は,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であることを示せ.

(2)  $\triangle ABC$ が正三角形のとき,  $\triangle ABC$ の外接円上の点Pを任意にとる. このとき,

$$AP^2 + BP^2 + CP^2$$

および

$$AP^4 + BP^4 + CP^4$$

を外接円の半径 $R$ を用いて表せ. ただし2点X, Yに対し,  $XY$ とは線分 $XY$ の長さを表す.

(下書き用紙)



**3**

(60点)

座標空間に5点

$$O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 4), \\ P(0, 0, -2)$$

をとる. さらに  $0 < a < 3$ ,  $0 < b < 3$  に対して2点  $Q(a, 0, 0)$  と  $R(0, b, 0)$  を考える.

- (1) 点  $P, Q, R$  を通る平面を  $H$  とする. 平面  $H$  と線分  $AC$  の交点  $T$  の座標, および平面  $H$  と線分  $BC$  の交点  $S$  の座標を求めよ.
- (2) 点  $Q, R, S, T$  が同一円周上にあるための必要十分条件を  $a, b$  を用いて表し, それを満たす点  $(a, b)$  の範囲を座標平面上に図示せよ.

(下書き用紙)



4 (60点)

$n$  を正の奇数とする. 曲線  $y = \sin x$  ( $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ ) と  $x$  軸で囲まれた部分を  $D_n$  とする. 直線  $x + y = 0$  を  $\ell$  とおき,  $\ell$  の周りに  $D_n$  を 1 回転させてできる回転体を  $V_n$  とする.

(1)  $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$  に対して, 点  $(x, \sin x)$  を  $P$  とおく. また  $P$  から  $\ell$  に下ろした垂線と  $x$  軸の交点を  $Q$  とする. 線分  $PQ$  を  $\ell$  の周りに 1 回転させてできる図形の面積を  $x$  の式で表せ.

(2) (1)の結果を用いて, 回転体  $V_n$  の体積を  $n$  の式で表せ.



(下書き用紙)

3

5 (60点)

$k$  を正の整数とし,  $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$  とおく.

- (1)  $a_{k+2}$  を  $a_k$  と  $k$  を用いて表せ.
- (2)  $k$  を限りなく大きくするとき, 数列  $\{ka_k\}$  の極限值  $A$  を求めよ.
- (3) (2) の極限值  $A$  に対し,  $k$  を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数  $m, n$  ( $m > n \geq 1$ ) を求めよ. またそのときの極限值  $B$  を求めよ.

- (4) (2) と (3) の極限值  $A, B$  に対し,  $k$  を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数  $p, q, r$  ( $p > q > r \geq 1$ ) を求めよ. またそのときの極限值を求めよ.

(下書き用紙)