

数 学

180 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は10 ページ， 答案用紙の冊子は5 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し， 下の枠内には受験番号の下2桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は300点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は， 下記の例にならい， 明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1

(60点)

次の問いに答えよ.

(1) $|x^2 - x - 23|$ の値が, 3を法として2に合同である正の整数 x をすべて求めよ.

(2) k 個の連続した正の整数 x_1, \dots, x_k に対して,

$$|x_j^2 - x_j - 23| \quad (1 \leq j \leq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と, その k に対する連続した正の整数 x_1, \dots, x_k をすべて求めよ. ここで k 個の連続した整数とは,

$$x_1, x_1 + 1, x_1 + 2, \dots, x_1 + k - 1$$

となる列のことである.

(下書き用紙)

5

1. 本件は、
2. 本件は、

3. 本件は、

4. 本件は、

5. 本件は、

6. 本件は、

7. 本件は、

8. 本件は、

9. 本件は、

10. 本件は、

11. 本件は、

12. 本件は、

13. 本件は、

14. 本件は、

15. 本件は、

2

(60点)

複素数平面上の異なる3点A, B, Cを複素数 α, β, γ で表す. ここでA, B, Cは同一直線上にないと仮定する.

(1) $\triangle ABC$ が正三角形となる必要十分条件は,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であることを示せ.

(2) $\triangle ABC$ が正三角形のとき, $\triangle ABC$ の外接円上の点Pを任意にとる. このとき,

$$AP^2 + BP^2 + CP^2$$

および

$$AP^4 + BP^4 + CP^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ. ただし2点X, Yに対し, XYとは線分XYの長さを表す.

(下書き用紙)

44. 100



1972年10月10日

1972年10月10日 10時 10分 10秒 10分

1972年10月10日 10時 10分 10秒 10分

1972年10月10日 10時 10分 10秒 10分

1972年10月10日 10時 10分 10秒 10分

1972年10月10日 10時 10分 10秒 10分

1972年10月10日 10時 10分 10秒 10分

1972年10月10日 10時 10分 10秒 10分

1972年10月10日 10時 10分 10秒 10分

3

(60点)

座標空間に5点

$$O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 4), \\ P(0, 0, -2)$$

をとる. さらに $0 < a < 3$, $0 < b < 3$ に対して2点 $Q(a, 0, 0)$ と $R(0, b, 0)$ を考える.

- (1) 点 P, Q, R を通る平面を H とする. 平面 H と線分 AC の交点 T の座標, および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ.
- (2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ.

(下書き用紙)



4 (60点)

n を正の奇数とする. 曲線 $y = \sin x$ ($(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$) と x 軸で囲まれた部分を D_n とする. 直線 $x + y = 0$ を ℓ とおき, ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする.

(1) $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ に対して, 点 $(x, \sin x)$ を P とおく. また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする. 線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ.

(2) (1)の結果を用いて, 回転体 V_n の体積を n の式で表せ.

(下書き用紙)

3

5 (60点)

k を正の整数とし, $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく.

- (1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ.
- (2) k を限りなく大きくするとき, 数列 $\{ka_k\}$ の極限值 A を求めよ.
- (3) (2) の極限值 A に対し, k を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 m, n ($m > n \geq 1$) を求めよ. またそのときの極限值 B を求めよ.

- (4) (2) と (3) の極限值 A, B に対し, k を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 p, q, r ($p > q > r \geq 1$) を求めよ. またそのときの極限值を求めよ.

(下書き用紙)