(平成 31 年度前期日程)

# 数　　学

180　分

**注　意　事　項**

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 10 ページ，答案用紙の冊子は 5 ページである。
3. **各**答案用紙の上の枠内に**受験番号**を記入し，下の枠内には受験番号の**下２桁**の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 300 点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

**1** (60 点)

(1) $h > 0$ とする．座標平面上の点 $\mathrm{O}(0, 0)$，点 $\mathrm{P}(h, s)$，点 $\mathrm{Q}(h, t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を $S$ とする．ただし，$s < t$ とする．三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ $p$，$q$，$r$ とするとき，不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときの $s$，$t$ の値を求めよ．

(2) 四面体 ABCD の表面積を $T$，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ $a$，$b$，$c$ とし，辺 AD，BD，CD の長さをそれぞれ $\ell$，$m$，$n$ とする．このとき，不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ell^2 + m^2 + n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ．

（下　書　き　用　紙）

**2** (60 点)

次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 $A$, $B$ を求めよ.

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\, dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし, $f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする.

（下　書　き　用　紙）

**3** (60 点)

$i$を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数$z$により$\dfrac{z}{3+2i}$と表される複素数全体の集合を$M$とする．

(1) 原点を中心とする半径$r$の円上またはその内部に含まれる$M$の要素の個数を$N(r)$とする．このとき，集合$\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$を求めよ．

(2) 複素数平面の相異なる2点$z$，$w$を結ぶ線分を$L(z,\ w)$で表すとき，6つの線分$L(0,1)$，$L\left(1,1+\dfrac{i}{2}\right)$，$L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$，$L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$，$L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$，$L(i,\ 0)$で囲まれる領域の内部または境界に含まれる$M$の要素の個数を求めよ．

（下　書　き　用　紙）

**4** (60 点)

$H_1$, …, $H_n$ を空間内の相異なる $n$ 枚の平面とする．$H_1$, …, $H_n$ によって空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を $(x, y, z)$ とするとき，

- 平面 $x=0$ を $H_1$, 平面 $y=0$ を $H_2$, 平面 $z=0$ を $H_3$ とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$,
- 平面 $x=0$ を $H_1$，平面 $y=0$ を $H_2$，平面 $x+y=1$ を $H_3$ とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$,
- 平面 $x=0$ を $H_1$, 平面 $x=1$ を $H_2$, 平面 $y=0$ を $H_3$ とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$,
- 平面 $x=0$ を $H_1$，平面 $y=0$ を $H_2$，平面 $z=0$ を $H_3$，平面 $x+y+z=1$ を $H_4$ とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$,

である．

(1) 各 $n$ に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2) 各 $n$ に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3) 各 $n$ に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

(下　書　き　用　紙)

**5** (60 点)

$a = \dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

を考える.

(1) 関数 $f(x) = (x+1)\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ は $x > 0$ で減少することを示せ.

(2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 $M$ を既約分数で表し，$b_k = M$ となる $k$ をすべて求めよ.

(下　書　き　用　紙)