（令和２年度　学士課程）

ＡＯ入試
（工学院）

総合問題（筆記）

１２０分

注意事項

１．試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。

２．本問題冊子は４ページ（表紙等を含まない），答案用紙は６ページである。

３．各答案用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。

４．すべての問題に解答すること。

５．解答はすべて各答案用紙の所定欄に記入すること。裏面は使用しないこと。

６．答案用紙の冊子は切りはなさないこと。

問題１

実変数 x の十分に滑らかな実関数を $f(x)$ として，方程式 $f(x)=0$ の解 x^* を求めたい。$f(x)$ が x の高次の多項式や複雑な関数を含む場合，解を厳密に得るのは難しく，解の近似値を求める必要がある。その方法として，解 x^* に近い初期値 x_0 から出発して，$f(x)$ を直線で近似することにより x^* の近似値 x_1 を求め，この x_1 から出発してまた次の近似値 x_2 を求めるという手順を繰り返すことで，解 x^* の近似値を求めるニュートン法がよく知られている。n を整数として，以下の問に答えよ。

問１　解の n 番目の近似値 x_n から $n+1$ 番目の近似値 x_{n+1} を求めるために，図 1 に示すように，座標平面上に描いた関数 $y=f(x)$ のグラフの点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線を引き，この接線と x 軸の交点の x 座標を新たな近似値 x_{n+1} とする。x_{n+1} を x_n を用いて表せ。なお，$f(x)$ の導関数を $f'(x)$ で表し，$f'(x_n)\neq 0$ とする。

問２　$f(x)=x^2-a^2$ とする。ここで，a は正の実定数である。このとき，方程式 $f(x)=0$ の解が $x^*=\pm a$ であることは明らかだが，初期値 x_0 が正の場合について，ニュートン法の手順を検討してみよう。

(A) $n \geqq 1$ について $x_n \geqq a$ であることを示せ。

(B) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ であることを示せ。

(C) 条件を変更して，初期値 x_0 が負の場合には $\lim_{n\to\infty} x_n = -a$ であることを，以上の結果を用いて示せ。

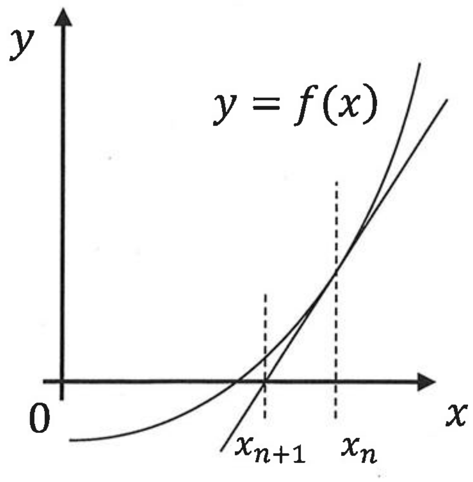

図 1

（次のページに続く）

問3　工学的問題では，しばしば与えられた関数の極大点や極小点を近似的に求める必要がある。実変数 x の十分に滑らかな実関数を $g(x)$ として，ニュートン法を用いて $g(x)$ が極値をとる点 $\tilde{x}$ の近似値を求めることを考える。

$$g(x) = \frac{x^4}{4} - 2x$$

のときに，初期値 $x_0 = 1$ から出発した場合について，$g(x)$ の極小を与える $\tilde{x}$ の近似値 x_2 を小数点以下 2 桁まで求めよ。

問4　さらに，実変数 $x,\ y$ の十分に滑らかな二変数実関数 $h(x,\ y)$ を考え，その極小値を与える点 $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ の近似値を求めたい。このとき，一変数に対する問 3 の方法を参考にした，以下の(i)から(iv)の手順を繰り返す方法が考えられる。

(i)　$(x_n,\ y_n)$ を出発点とする。

(ii)　まず y の値を y_n に固定して定数とみなし，$h(x,\ y_n)$ を x の一変数関数とみなして，その極小点を与える x の値 x_{n+1} を求める。

(iii)　次に x の値を x_n に固定して定数とみなし，$h(x_n,\ y)$ を y の一変数関数とみなして，その極小点を与える y の値 y_{n+1} を求める。

(iv)　これにより求めた $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を次の出発点として(ii)に戻る。

この方法に関して，初期値を $x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0$ として，以下の問に答えよ。

(A)　与えられた関数が $h(x,\ y) = ax^2 + cy^2$ の場合には，(i)から(iv)までの手順を一度だけ実行すれば，上記の方法による計算結果が $(x,\ y) = (0, 0)$ の極小点に到達することを示せ。ここで，a と c は正の実定数である。

(B)　与えられた関数が $h(x,\ y) = ax^2 + bxy + cy^2$ という形の場合に，上記の方法による $(x_n,\ y_n)$ の計算結果が $n \to \infty$ で $(0, 0)$ に収束する b の範囲を求めよ。ここで，$a,\ b,\ c$ は実定数で，a と c は正である。

（問題 1 はここで終わりである）

問題２

図２のように，真空中（誘電率ε_0）で向かい合った同形状，同面積Aを有する平面電極P_1，P_2は，コンデンサーを形成している。電極の大きさは，電極間の距離に対して十分大きく，２枚の電極間には，通電時に，電極に垂直で一様な電場が生じる。図中の下方に向かう重力加速度をgとする。質量Mの電極P_1は，ばね定数K，電気抵抗Rを有する導電性のコイルばねにより，天井から吊り下げられている。ばねの質量やインダクタンスは無視できる。２つの電極は，常に平行を保ち，P_2は固定され，P_1は鉛直方向のみに運動する。電源は，必要な時刻に任意の電圧Vを発生可能である。以下で説明する記号も用いて，各問に解答せよ。

問１　はじめに，電源の出力電圧を０に設定し，電極の電荷を十分に放電した状態で，電極間の距離を測定したところd_0であった。この時のばねの自然長からの伸びを求めよ。次に，P_1を電極間の距離d_0の位置から，手でわずかに移動し，その手を離すと，P_1は単振動を始めた。その時の単振動の周波数を求めよ。

問２　次に，電極間の距離d_0でP_1を固定し，電源の出力電圧を０からV_0に，時刻t_0において瞬時に変化させた。コンデンサーの電荷と電流の変化の様子（過渡現象）を答案用紙のグラフ中に図示せよ。なお，横軸は時間，縦軸はそれぞれ電荷と電流の値を示し，電荷が収束する値と電流の最大値もグラフ中に明示せよ。但し，電極の固定による静電容量の変化はない。

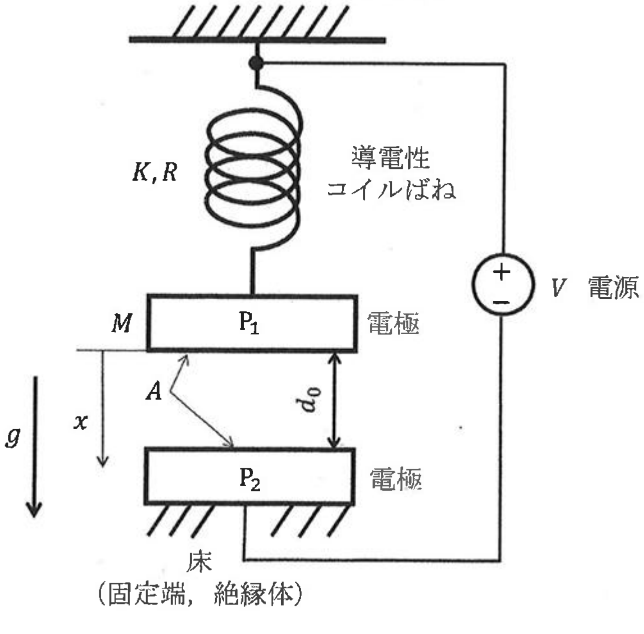

図２

（次のページに続く）

以降の問題では，現象を簡単化するため，電気抵抗Rを 0 として解答せよ。

問３　電源から一定電圧V_0を出力した状態で，P_1の固定を外したところ，電極間の距離は最終的にd_1となり，P_1は，P_2と十分離れて静止した。その後，わずかな初期変位をP_1に与え，単振動させた。振動時のP_1の微小変位Δxの絶対値は，d_1に比べ十分小さい。この時の，P_1の運動方程式を導出せよ。また，単振動の周波数も求めよ。なお，一般に，δ，nが実数で，$|\delta|$が 1 に比べて十分に小さい時，$(1+\delta)^n \fallingdotseq 1+n\delta$が成り立つ。このことを計算で用いて良い。

問４　電源から一定電圧V_0を出力した状態から，P_1，P_2の電荷が逃げないように，電源を取り外した。次に，絶縁したひもをP_1に取り付け，ばねの自然長の位置までP_1をゆっくり持ち上げた。ばねの自然長の状態を保つために必要な，ひもを引っ張る力の大きさを求めよ。

問５　電極の電荷を十分に放電したのち，再度，電源を接続し，交流電圧を出力した。交流電圧の周波数はf，振幅はV_1である。P_1は，一定振幅の振動を持続した．この時のP_1の振動の周波数を求めよ。また，振動の中心の位置を，ばねの自然長からの伸びで示せ。なお，振動の振幅は，電極の自重によるばねの自然長からの伸びや，電極間の距離に比べて十分に小さいとする。また，振動中の静電容量の変化と，電極に働く慣性力の影響は無視できるとする。

問６　最後に，電源の出力電圧を 0 に戻し，P_1が静止した状態から，再度，P_1が振動しないように，極めてゆっくり電圧を単調に増加させた。ある電圧値を越えた瞬間，突然，電極P_1は急激に変位し，P_2に接触，短絡した。急激に動き出す直前の電圧と，その瞬間の電極間の距離を求めよ。

（問題２はここで終わりである）