東京工業大学情報理工学院 総合型選抜　　活動実績報告書

氏名（よみ): **大岡山 花子（おおおかやま はなこ）**
高等学校: **〇〇県立△△高等学校**
(**2021**年 **3** 月　☐卒業・☒卒業予定)

活動実績概要（150 字程度):

整数を 2 で割る計算を続けたときの数の変化ついて考察した．割って行く過程で奇数の出る回数や，切り上げ，切り捨ての取り方に基づく計算過程全体での奇数の出る総回数について検討した．

活動実績の実施状況:

☒志願者が単独で行った
☐教師などからの指導を受けながら志願者が単独で行った
☐共同で行った
☐その他

報告書本体ページ数(表紙を含まない): **4** ページ

注意:

- 報告書本体を 4 ページ以内で作成し、この表紙と一緒に提出すること。
- 報告書本体の形式は自由とするが、文字の大きさは 10 ポイント以上にすること。また内容として活動実績の背景、具体的な内容、活動実績の実施状況の説明、参考にした資料の一覧などを必ず含むこと。
- 報告書本体に、活動実績を志願者が単独で行ったか否か、共同で行った場合は自身の役割、指導を受けた場合はどの部分に対する指導か等の説明を書くこと。
- 報告書本体には氏名、学校名はどうしても必要な場合を除いて書かないこと。

2 で割る整数の変化

1. 背景

数学の問題（とくに数学パズル）を考えるのが好きで，いろいろな本を読んだり考えたりしている．とくに整数の不思議にはまっている．今回は，整数を 2 で割ったときの変化について考えた．

複数の物を 2 つにわけるとき，偶数個だと都合がよい．2 で割り切れるからだ．奇数だと気持ち悪い．切り捨てると損する気がするし，切り上げると迷惑をかけている気がする．ある数を 2 で割り続けたとき，いつも偶数なのは 2 のべき乗の場合だ．では，普通の数は，1 になるまで 2 で割り続ける間に何回，気持ちの悪い奇数が出てくるのだろうか？この疑問についてこの夏に考えたことを私の成果としてまとめてみました．

2. 成果の具体的な内容

ある数を 1 になるまで 2 で割り続ける過程を「連続半分化」と呼ぶことにする．たとえば, 16 ならば, 16→8→4→2→1 という計算過程である. 途中で奇数が出る場合には, 切り上げか切り捨てを行う．たとえば，常に切り捨てする場合には，15→7→3→1 となる．このような連続半分化において奇数が出ると悲しいわけだが，その回数を考えた．初期値 n に応じて奇数の出る回数，「奇数出現数」がどのように変わるか？を考えた．

2.1. 基本的な考察（奇数出現総数普遍の法則）

数 n に対して連続半分化をしたときに，奇数の場合，切り捨てする方法を「切り捨て戦略」と呼ぶことにする．切り捨て戦略を取った場合には，割り算の回数は $[\log_2 n]$（つまり，対数の切り捨て）である．たとえば，16～31 の間のどの数も 4 回の割り算になる．一方，奇数の場合，切り上げする方法を「切り上げ戦略」と呼ぶ．その場合には，割り算の回数は$[\log_2 n]+1$ になる．このように割り算の回数が同じ数の中で，奇数出現数を考えてみる．たとえば，16～31 の中では，16 が 2 のべきなので，奇数出現数は 0（最後の 1 は数えない）である．一方，31 は，31→15→7→3→1 で 4 回，何とすべてが奇数となる不運な数である. ただ, これは, 割り切れないときに切り捨てした場合で, 切り上げ戦略を取れば, 31→16→8→4→2→1 で, 奇数は最初の 1 回だけだ！（ただし, 割り算は 1 回多くなるが.）つまり，切り捨てと切り上げでは状況が変わる可能性がある．

そこで，16～31 の中の奇数について，切り捨てと切り上げの場合で考えてみると，次のようになった．（16, 8, 4 のような 2 のべきになった時点で省略）

切り捨て	切り上げ
17→8（1 回）	17→9→5→3→2→1（4 回）
…（省略）	

何と，切り捨てと切り上げの場合の合計は常に 5 回と同じなのである．これを「奇数出現総数普遍の法則」と名付け，それを以下に証明した．以下の議論では，初期値 n の 2 進数表現が重要となる．実際，$[\log_2 n]+1$ は，2 進数表現をした場合の桁数である．これを 2 進桁数と呼ぶことにする．

定理 1． 2 進桁数が k である奇数 n に対して，切り捨て戦略で連続半分化したときと切り上げ戦略で連続半分化したときの奇数出現数の総数は常に k である．

証明． 奇数 n を 2 進数で表わす．このとき，1 になっている桁の数を k_1 とする．また，0 になっている桁の数を k_0 とする．$k_1 \geqq 2$ である．切り捨て戦略で連続半分化したとき，奇数になる回数は，k_1-1 である．というのも，切り捨て戦略で連続半分化する過程は，2 進数で見ると毎回，1 桁ずつ短くなる過程であり，その過程で奇数が出るのは，1 が右端に来るときだからである．（最後の 1 は数えないので－1 になる．）

一方，切り上げ戦略で連続半分化したときに奇数になる回数は k_0+1 回だ．その理由を説明する．

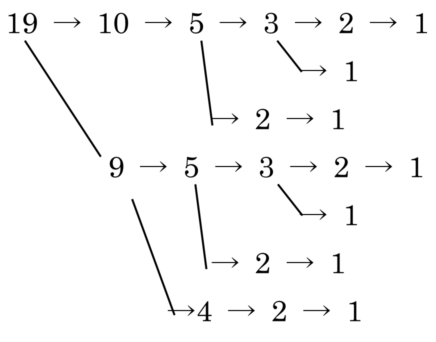
（省略）

以上を合わせると，両戦略での合計は $k_0+1+k_1-1=k$ となる．

証明終

2.2. 最も運の悪い数

切り捨て戦略や切り上げ戦略のように，切り捨てと切り上げを決めるのでなく，たとえばランダムに選んだらどうなるだろうか？という疑問を持った．より一般的には，奇数に出会ったときに，切り捨てるか，切り上げるかの選択で運命が分かれるが，そのすべての場合で（運悪く）奇数に遭遇する回数を考えてみた．この回数を「連続半分化奇数出現総数」と呼ぶことにする．たとえば，19 の場合には，



で 6 回となる．この回数に関しては，次のような漸化式を得ることができた．

定理 2． 数 n の連続半分化奇数出現総数を $s(n)$ とすると，次の漸化式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
s(\mathrm{n}) &= 1 + s([n/2]) + s([n/2]+1) \qquad && n \text{ が奇数のとき} \\
&= s(n/2) && n \text{ が偶数のとき}
\end{aligned}
$$

これについては，残念ながらそれ以上の解析はできなかった．そこで，同じ2進桁数を持つ数のうち，どのような数で $s(n)$ が最も大きくなるかを考えた．そのような数を「最も運の悪い数」と呼ぶことにする．これについては，いろいろ試したり，考えたりして，次のような結構を得た．

定理 3. 2進桁数が k の数 n の中で，最も運の悪い数は，k が奇数の場合は，2進数で $n = 1010\ldots101$ となる数である．k が偶数の場合には，$n = 1010\ldots1011$ となる数である．
証明. 帰納法で証明できる．ただ，紙面が足りないので省略する．

2.3. まとめと今後の課題

いろいろ考えてみると，最も運の悪い数は各桁で2つありそうだ．定理3は，そのうちの1つについての定理だが，もう1つについても同様に言えると思うが，そこまで追及できなかった．また，この問題を考えている最中に連続半分化と似たような数の計算過程で「コラッツ問題」あるいは「$3n$+1 問題」と呼ばれる未解決問題があることを知った[1]．こんなことがずっと未解決であるとは驚きである．

3. 単独の成果か否か

ここに書いたことはすべて自分一人で考えました．ただ，この文書を作成するにあたっては，所属している数学研究会の顧問の○○先生に見て頂いた．

4. 参考資料

[1] コラッツ問題のウィキペディア．