平成３１年度ＡＯ入試　工学院　解答例・出題の意図

問題１　出題の意図

画像圧縮等に用いられる変換符号化の一種である Karhunen−Loeve 変換を具体的な題材として，誤差を最小化する軸を求める問題を出題した。この変換は工学分野で使用されているものあるが，この分野の専門知識が無くても解けるよう，高等学校の数学におけるベクトルや微分等の知識を応用することで説明可能なように出題内容を工夫している。このように，本問題は，未知の問題に対する数学の応用力を測ることを意図したものである。

問題２　解答例

問１

1-1 理想気体であるので，等温変化では $pV=$一定より，

$$pV=p_1V_1$$

$$p=\frac{p_1V_1}{V}$$

よって

$$W_{\mathrm{in}}=-\int_{V_1}^{V_2}pdV=-p_1V_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}dV=-p_1V_1\left[\log V\right]_{V_1}^{V_2}=-p_1V_1\left(\log V_2-\log V_1\right)=p_1V_1\log\frac{V_1}{V_2}\ \cdots（答え）$$

1-2 等温変化では内部エネルギーは変化しないので，外部へ放出した熱量は，外部からされた仕事に等しい。

$$Q_{\mathrm{out}}=W_{\mathrm{in}}$$

上式右辺に前問 1−1 の答えを用い，さらに理想気体の状態方程式 $pV=nRT$ および $T_1=T_0$ を考慮することにより

$$Q_{\mathrm{out}}=p_1V_1\log\frac{V_1}{V_2}=nRT_1\log\frac{V_1}{V_2}=nRT_0\log\frac{V_1}{V_2}\qquad\cdots（答え）$$

1-3 断熱変化の関係式 $pV^{\gamma}=$一定（このサイクルの p-V 図より）と理想気体の状態方程式 $pV=nRT$ を用いると $V^{\gamma-1}T=$一定 の関係が得られる。この関係を用いると，状態③から状態④への変化は断熱変化であることから

$$V_3{}^{\gamma-1}T_3=V_4{}^{\gamma-1}T_4$$

上式に次の関係，

$$V_3=V_2,\quad T_3=T_{\mathrm{H}},\quad V_4=V_1,\quad T_4=T_0$$

を用いると，次式が得られる。

$$V_2{}^{\gamma-1}T_{\mathrm{H}}=V_1{}^{\gamma-1}T_0$$

よって

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\qquad\cdots（答え）$$

この結果を用いて問 1-2 の答えの熱量 Q_{out} を書きかえると，

$$Q_{\mathrm{out}}=nRT_0\log\frac{V_1}{V_2}=nRT_0\log\left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=\frac{nRT_0}{\gamma-1}\log\left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_0}\right)$$

さらに $C_p-C_V=R$ の関係より

$$C_V\left(C_p/C_V-1\right)=R$$

$$C_V\left(\gamma-1\right)=R$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

よって

$$Q_{\mathrm{out}} = nC_V T_0 \log\left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_0}\right) \qquad \cdots（答え）$$

1-4 状態②→③の過程で気体が受け取る熱量は，理想気体が体積一定のもとで温度 T_0 から T_{H} に温度上昇するのに必要な熱量であるので

$Q_{\mathrm{in}} = nC_V(T_{\mathrm{H}} - T_0)$ $\qquad \cdots$（答え）

1-5 外部にした仕事を W とすると熱効率 e は W/Q_{in} と定義される。さらにエネルギー保存則より $W = Q_{\mathrm{in}} - Q_{\mathrm{out}}$ であるので，次式がなりたつ。

$$e = \frac{Q_{\mathrm{in}} - Q_{\mathrm{out}}}{Q_{\mathrm{in}}}$$

上式に問 1-3，問 1-4 の答えを用いることにより，

$$e = \frac{nC_V\left(T_{\mathrm{H}} - T_0\right) - nC_V T_0 \log\left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_0}\right)}{nC_V\left(T_{\mathrm{H}} - T_0\right)} = 1 - \frac{T_0}{T_{\mathrm{H}} - T_0}\log\left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_0}\right) \qquad \cdots（答え）$$

問２

2-1 【ⅰ】エ　【ⅱ】ア　【ⅲ】イ　【ⅳ】ア

2-2