Fibonacci 数列の母関数に関する初等的考察

1　背景

漸化式 $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$, $k \geq 0$, と初期値 $f_0 = f_1 = 1$ で定義される Fibonacci 数列 $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ に関しては, 極めて多くの事が既に知られている; [中村] 参照. 例えば, その母関数 (x の形式的冪級数)

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$$

は, x の簡単な有理式 $\frac{1}{1-x-x^2}$ になる事が知られている. そして, この母関数 $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ を無限級数とみなしたときの収束半径 R は, 大学での数学の講義で習う筈の "ダランベールの定理" を使えば $R = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, である事が分かる. ここで, Fibonacci 数列の一般項 f_k は, $\beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおけば

$$f_k = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}, \qquad k \geq 0,$$

と書けることを使っている; このような 3 項間漸化式の解法は, 高校における数学の授業で既に学習している.

しかし, $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ を無限級数とみなしたときに, これが収束するような 0 でない実数 x が存在することを高校で学習する数学だけで示すことができるのか, という疑問が生じる; [日比, 第 8 章, p. 128] 参照. この疑問について考えたことをまとめてみて, 私が所属している数学クラブ顧問の□□先生に見て頂いた. そして, □□先生の薦めに従って, 私が考えたことを○○ Fibonacci 協会主催の第△回研究集会ジュニア・セッションで発表した.

2　成果の具体的な内容

2.1　予備的考察

高校で学習する等比級数に関する公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \qquad (|r| < 1)$$

は, (有限) 等比数列の和の値に関する公式

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

において, $n \to \infty$ とすることで得られている; ここで $|r|<1$ なら $n \to \infty$ とすると $r^n \to 0$ であることを使っている.

そこで, 無限級数 $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ についても, その有限部分和

$$F_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k x^k$$

の値に関する明示的な等式が得られれば, $n \to \infty$ とすることで無限級数 $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ の収束性及びその値についての結果が得られるのではないかと考えた.

2.2 主結果とその応用

試行錯誤の結果, 有限部分和 $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k x^k$ に関して下記の等式を得た.

この等式を発見したきっかけは, 2002 年度 (前期) の東京大学入試における数学の問題 [2] 番 ([大数, p. 238] 参照), 及びそれに類似した問題 ([長渡, 第 3 章 3 番]) を解いてみたことである. これらの問題では,

$$x^{n+2} = (x^2 - x - 1)(\sum_{k=0}^{n} g_k x^{n-k}) + p_n x + q_n$$

により定まる g_k, $0 \leq k \leq n$, の間, 及び p_n, q_n, $n \geq 0$, の間の関係を問うていた; 実は, $g_{k+2} = g_{k+1} + g_k$ であり, また $p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$, $q_{n+1} = p_n$ という関係式が成り立っている.

この問題に inspire されて考えてみた結果として, 次の等式を見つけることができた.

Theorem 1. $n \geq 0$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k x^k = \frac{1}{1-x-x^2}\left(1 - f_{n+1}x^{n+1} - f_n x^{n+2}\right).$$

上記の等式は, 一度見つけてしまえば, $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ という漸化式に基づいて, n に関する (数学的) 帰納法によって容易に証明することができるので, 証明は省略する.

この等式によって, 有限部分和 $F_n(x)$ の $n \to \infty$ での挙動を知るには, $f_{n+1}x^{n+1} + f_nx^{n+2}$ の挙動が分かれば良いことになる. そしてそれには ($f_nx^{n+2} = x^2 \times f_nx^n$ なので) 結局は f_nx^n の挙動が分かれば良い. ここで, Fibonacci 数列の一般項 f_n は $f_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ と表されたことを思い出すと, $(\alpha-\beta)f_nx^n$ は次のように書くことができる:

$$(\alpha-\beta)f_nx^n = (\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})x^n = \alpha(\alpha x)^n - \beta(\beta x)^n.$$

よって, $|\beta| < |\alpha| = \alpha$ であることに注意すると, $|x| < \frac{1}{\alpha}$ であれば ($|\alpha x| < 1$ かつ $|\beta x| < 1$ なので) $n \to \infty$ で $f_nx^n \to 0$ であることが分かる.

このようにして, $|x| < \frac{1}{\alpha}$ であれば $n \to \infty$ で有限部分和 $F_n(x)$ は $\frac{1}{1-x-x^2}$ に収束することが分かった. これは,「背景」で述べた形式的冪級数としての等式 $\sum_{k=0}^{\infty} f_kx^k = \frac{1}{1-x-x^2}$ や, 冪級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_kx^k$ の収束半径 R が $\frac{1}{\alpha}$ であるという結果と整合的である.

3 単独の成果か否か

Fibonacci 数列に関しては既に極めて多くのことが知られているので, 上記の Theorem 1 の等式も, 恐らく既に良く知られた等式であると思われた. 実際, ○○ Fibonacci 協会主催の第△回研究集会ジュニア・セッションでこの結果を発表したところ, 出席者の方から, この結果は既に知られているとの指摘があった. しかし, この等式は私が自分一人で考えて見つけたものなので, そのことにはそれなりの意味があると考えている.

参考文献

[大数] 東京出版編集部編, 東大・入試数学 50 年の軌跡, 東京出版, 2020 年.

[中村] 中村滋, フィボナッチ数の小宇宙, 日本評論社, 2002 年.

[長渡] 長岡亮介・渡辺理史, 最高峰の数学へチャレンジ, 駿台文庫, 2005 年.

[日比] 日比孝之, 証明の探求, 大阪大学出版会, 2016 年.